1. Релация на еквивалентност

В математиката често се изучава отношенията или ралацията между математическите обекти. Релации между два обекта наричаме двуместни или бинарни. Например казваме, че правата l е в релация R с точка P ако l минава през P. Тогава R е (двуместна)релация между обектите наречени линии и обектите наречени точки. Една нестрога дефиниция е:

В едно множество X е зададена релация R ако за всеки два елемента x,$y \in X$, е казано дали x е в релация R с y (xRy) или не е в релация ($!xRy$).

Примери:
• релацията равенство: $x = y$;
• всяка функция от едно множество X в друго множество $Y(f : X \to Y)$, дефинира релация R: $xRy \Leftrightarrow y = f(x), x \in X, y \in Y$;
•релацията перпендикулярност $\perp$ в множеството на правите.

Нека X е множество. С X^2 ще означаваме множеството на наредените двойки елементи от множеството X,т.е. $X^2 = \{(a, b) : a, b \in X\}$.
Аналогично дефинираме $X^n = (a_1, a_2, ..., a_n) : a_1, a_2, ..., a_n \in X$, множеството на наредените n-торки.

Дефиниция1: Релация $\sim$ в множеството X ще наричаме *релация на еквивалентност*, ако са изпълнени следните три свойства:
1)$a \sim a$, за $\forall\ a \in X$(рефлекцивност);
2)Ако $a \sim b$, то $b \sim a$ (симетричност);
3)Ако $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$(транзитивност).
Пример: Нека вземем релацията $\|$ в множеството на правите. Нека l е права, тогава:
1) $l\|l$ (всяка права е успоредна на себе си);
2) $l\|m$ и $m\|l$ (ако една права е успоредна на друга, то и другата е успоредна на първата);
3) $l\|m, m\|n \Rightarrow l\|n$ (ако ена права е успоредна на вотра и втората е упоредна на трета, то първата е успоредна на третата). Така доказахме, че релацията $\|$ е релация на еквивалентност.

Дефиниция2: Нека $\sim$ е релация на еквивалентност в множеството X. Клас на еквивалентност на $x \in X$ се нарича множеството:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\},$$

т.е. $[x]$ е множеството на тези елементите на X, които са в релация $\sim$ с x.
Например $[x]$ може да бъде множеството от всички прави l успоредни на правата m.

Твърдение: Нека $\sim$ е релация на еквивалентност в множеството X и $x, y \in X$. Тогава:
1) $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$;
2) Ако $x \nsim y$, $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Доказателство:
1)$\Rightarrow$) $z\epsilon[x] \Rightarrow x \sim z \Rightarrow z \sim x$ и от $x \sim y \Rightarrow z \sim y \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \in [y]$
$\Rightarrow [x] \subset [y]$;
$\Leftarrow$) Аналогично $[y] \subset [x]$;
Следователно $[x] \equiv [y]$;
2)Нека $x \nsim y$. Допускаме, че $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Тогава от $x \sim z$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, $z \sim y \Rightarrow x \sim y$.
Стигнахме до противоречие.
Ако $x \sim y$, то или $[x] \equiv [y]$, или $[x] \cap [y] = \emptyset$, т.е. X представлява обединение на непресичащи се класове на еквивалентност.